

# Mintafeladatsor

## I. rész

### 1. feladat

Aladár a tanév során megszerzett összes jegyének 6%-a egyes, hatoda kettes, 20%-a hármas, 24%-a négyes, harmada ötös.

- Legalább hány jegye van Aladárnak?
- Határozza meg a jegyek átlagát, móduszát és mediánját!
- Irma néni, Aladár osztályfőnöke úgy számolja Aladár szorgalmi jegyét, hogy az összes jegy mértani közepét a kerekítés szabályainak megfelelően egészre kerekíti. Hányast kap szorgalomból Aladár? (13 pont)

### 2. feladat

Legyen a következő művelet:  $a \circ b = a^{lg(b)}$ , ahol  $a$  és  $b$  pozitív valós számok!

Bizonyítsa be, hogy ez a művelet:

- nem eredményezhet negatív számot, vagyis  $a \circ b > 0$ ;
- kommutatív:  $a \circ b = b \circ a$ ;
- asszociatív:  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ;
- disztributív a pozitív valós számokon értelmezett szorzással együtt tekintve:  $a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot (a \circ c)$ ! (14 pont)

### 3. feladat

Egy ötfős társaság a karácsonyi ajándékozásra készül. Sorsolással akarják eldönteni, hogy ki kinek vegyen ajándékot. A következő feltételekben egyeztek meg:

- Mindenki pontosan egy ajándékot vesz, és pontosan egy ajándékot kap.
- Ne fordulhasson elő, hogy valaki saját magának vesz ajándékot.
- Ne legyen olyan pár a társaságban, akik egymásnak vesznek ajándékot.

- Lehetővé teszik-e a feltételek, hogy a társaságban van olyan háromfős csoport, akik egymásnak vesznek ajándékot, vagyis nem kapnak, és nem adnak ajándékot csoporton kívüli embernek?
- Lehet-e ilyen négyfős csoport?
- Határozza meg az ajándékozás lehetséges kimeneteleinek számát!

A társaság úgy dönt, hogy mindenkinek a nevét felírják egy cédulára, amiket betesznek egy dobozba. Mindenki húz egy cédulát, és akinek a nevét húzta, annak vesz ajándékot.

- Mi a valószínűsége, hogy a sorsolás eredménye megfelel a feltételeknek? (13 pont)

### 4. feladat

Egy bank legújabb hitelkonstrukcióját a következő feltételekkel hirdeti: a hitel összege 200 000 Ft, a havi törlesztőrészlet 10 000 Ft, melyet két éven keresztül kell fizetni.

- Az infláció minden évben 10%. Hány forintba kerül két év múlva ugyanaz a zokni, amely ma 1 000 Ft-ba kerül?
- Megéri-e a banknak a hirdetett hitel, ha az éves infláció 10%? Tegyük fel, hogy a befizetett részletet a bank beteszi a széfbe, és hozzá se nyúl a két év lejártaig.

Felvesszük a 200 000 Ft hitelt, melyet azonnal beteszünk egy második bankba, ahol az kamatozik. Két év múlva, amikor az összes pénzünket kivesszük, pontosan annyi pénzt kapunk, amennyit az első banknak befizettünk a két év alatt.

- Hány százalék az éves kamat a második bankban?
- Hány százalék a havi kamat? (13 pont)

## II. rész

Az alábbi öt feladat közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

## 5. feladat

Hét testvér kirándulni ment a hegyekbe, ahol egy gyémántot találtak. Igazságosan akarják elosztani, de mivel nem akarják szétörni, inkább kisorsolják, kié legyen a gyémánt. Egyedül egy pénzérme van náluk mint sorsolásra alkalmas eszköz. Úgy döntöttek, hogy mindenki választ egy számot nullától hatig (mindenki különböző számot választ), majd a pénzérmét hatszor feldobják, és a gyémánt azé lesz, akinek a választott száma megegyezik azzal a számmal, ahányszor írást dobta az érmével.

- „Testvéries”, azaz igazságos-e ez a sorsolás?
- Melyik számot érdemes választani, hogy a legnagyobb eséllyel legyen miénk a gyémánt?
- Adjon meg egy eljárást, amivel igazságosan sorsolható ki a gyémánt! A sorsolás tetszőleges ideig tarthat, de továbbra is csak a pénzérmét használhatjuk. (16 pont)

## 6. feladat

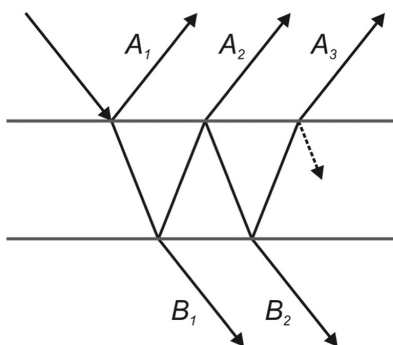
Egy közvélemény-kutató cég reprezentatív exit poll felmérést készített a választásról, vagyis megkérdezte a szavazóhelyiségekből kilépő embereket, hogy melyik pártra szavaztak. Eredményeiket a táblázat első sora tartalmazza. Korábbi felmérésekből tudjuk, hogy a választadói hajlandóság nem egyforma a különböző csoportokban. A táblázat második sora megadja a választadói hajlandóságot, vagyis hogy az egyes pártra szavazók milyen arányban árulták el, hogy kire szavaztak.

	A párt	B párt	C párt	egyéb / nem mondja meg
exit poll	43%	35,5%	3%	18,5%
válaszdói hajlandóság	80%	90%	60%	
a választás eredménye				

- Határozza meg a választás eredményét, vagyis töltsé ki a táblázat harmadik sorát!
- Egy másik cég 100 fős exit poll felmérést készített. Mi a valószínűsége, hogy az ő felmérésükben is pontosan 3% válaszolja azt, hogy a C pártra szavazott? Mi a valószínűsége, hogy 0%-ot mérnek? (14 pont)

## 7. feladat

Egy foton az üveglap felületéhez érve  $p = 0,1$  valószínűséggel visszaverődik, valamint  $q = 1 - p = 0,9$  valószínűséggel továbbhalad. Ez teljesül a lap mindkét oldalára.



- Mi a valószínűsége, hogy az ábrán  $B_2$ -vel jelölt úton halad a foton?
- Mi a valószínűsége, hogy tetszőleges számú visszaverődést megengedve a foton végül áthalad az üveglapon?
- Tetszőleges számú visszaverődést megengedve  $p$  milyen értéke esetén teljesülne, hogy a foton 50% valószínűséggel halad át az üveglapon? (16 pont)

### 8. feladat

Az alábbi táblázatban az egyes korcsoportokon belül azok aránya szerepel, akik szeretik a teát, akik szeretik a mustot, végül azok, akik a mustot és a teát is szeretik.

korcsoport	korcsoport aránya a lakosságban	tea	must	mindkettő
0-30	30%	50%	10%	5%
30-60	40%	30%	40%	20%
60-100	30%	60%	60%	30%

- a) Pista szereti a mustot. Bizonyítsa be, hogy az átlagosnál nagyobb annak a valószínűsége, hogy a teát is szereti!  
 b) Tegyük fel, hogy nem állnak rendelkezésünkre a táblázatban szereplő adatok, csak annyit tudunk, hogy egy teakedvelő az átlagosnál nagyobb valószínűséggel szereti a mustot. Bizonyítsa be, hogy ebből már következik az a) feladat állítása! (16 pont)

### 9. feladat

A teniszben egy adogatásnak három kimenetele lehetséges:

1. Az adogató nyeri a labdamenetet.
2. Az adogató elveszti a labdamenetet.
3. A szerva érvénytelen. Ebben az esetben az adogató még egyszer szerválhat, ha az is érvénytelen, elveszti a labdamenetet.

András éppen adogatásra készül. Minél erősebben üti meg a labdát, ellenfele annál nehezebben tudja azt visszaadni, viszont annak is nagyobb lesz a valószínűsége, hogy a szervája érvénytelen. Korábbi meccsei alapján kielemezte a különböző lehetőségek valószínűségeit a labda sebességének függvényében.

A sebességet  $x$  jelöli  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ban.

$f(x) = \frac{4 - (x - 5)^2}{6}$  a valószínűsége, hogy az adott szervával megnyeri a labdamenetet.

$g(x) = \frac{(x - 3)^2}{20}$  a valószínűsége, hogy a szerva érvénytelen.

- a) Milyen sebességet válasszon, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel már az első szervánál megnyerje a labdamenetet? Mekkora ez a valószínűség?
- b) Mi a valószínűsége, hogy megnyeri a labdamenetet, ha szokása szerint az első szervát 198 km/h, a másodikat pedig 180 km/h sebességgel üti? A második szervára természetesen csak akkor kerül sor, ha az első érvénytelen volt.
- c) Milyen sebességgel üsse az elsőt, és milyennel a második szervát, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel nyerje a labdamenetet? Mekkora ez a valószínűség? (16 pont)